Exame Final Nacional de Matemática Aplicada às Ciências Sociais

Prova 835 | 1.ª Fase | Ensino Secundário | 2024

11.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 55/2018, de 6 de julho | Decreto-Lei n.º 62/2023, de 25 de julho

Duração da Prova: 150 minutos. | Tolerância: 30 minutos. 14 Páginas

---

A prova inclui 9 itens, devidamente identificados no enunciado, cujas respostas contribuem obrigatoriamente para a classificação final. Dos restantes 5 itens da prova, apenas contribuem para a classificação final os 3 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.

Para cada resposta, identifique o item.

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta.

Não é permitido o uso de corretor. Risque aquilo que pretende que não seja classificado.

É permitido o uso de régua, compasso e calculadora gráfica.

Apresente apenas uma resposta para cada item.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

A prova inclui um formulário.

Nas respostas aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Nas respostas aos restantes itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

Sempre que recorrer à calculadora, apresente, consoante a situação, todos os elementos relevantes visualizados.

Formulário

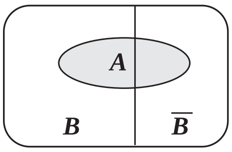
Modelos de grafos

Condição necessária e suficiente para que um grafo conexo admita circuitos de Euler

Um grafo conexo admite circuitos de Euler se e só se todos os seus vértices forem de grau par.

Modelos de probabilidade

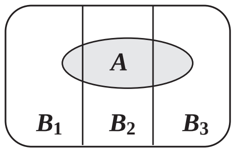
Teorema da probabilidade total e regra de Bayes



$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B}) =$$
$$= P(B) \times P(A \mid B) + P(\overline{B}) \times P(A \mid \overline{B})$$

$$P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} =$$

$$= \frac{P(B) \times P(A \mid B)}{P(B) \times P(A \mid B) + P(\overline{B}) \times P(A \mid \overline{B})}$$



$$P(A) = P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2) + P(A \cap B_3) =$$
$$= P(B_1) \times P(A \mid B_1) + P(B_2) \times P(A \mid B_2) + P(B_3) \times P(A \mid B_3)$$

$$P(B_k \mid A) = \frac{P(A \cap B_k)}{P(A)} =$$

$$= \frac{P(B_k) \times P(A \mid B_k)}{P(B_1) \times P(A \mid B_1) + P(B_2) \times P(A \mid B_2) + P(B_3) \times P(A \mid B_3)}$$

podendo k tomar os valores $1, 2$ ou 3

Modelo normal

Se X é $N(\mu, \sigma)$, então:

$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0{,}6827$

$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0{,}9545$

$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0{,}9973$

Intervalos de confiança

Intervalo de confiança para o valor médio μ de uma variável aleatória normal X, admitindo que se conhece o desvio padrão da variável

$\left]\overline{x} - z\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\ ,\ \overline{x} + z\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right[$
n – dimensão da amostra $\overline{x}$ – média amostral σ – desvio padrão da variável z – valor relacionado com o nível de confiança (*)

Intervalo de confiança para o valor médio μ de uma variável aleatória X, admitindo que se desconhece o desvio padrão da variável e que a amostra tem dimensão superior a 30

$\left]\overline{x} - z\dfrac{s}{\sqrt{n}}\ ,\ \overline{x} + z\dfrac{s}{\sqrt{n}}\right[$
n – dimensão da amostra $\overline{x}$ – média amostral s – desvio padrão amostral z – valor relacionado com o nível de confiança (*)

Intervalo de confiança para uma proporção p, admitindo que a amostra tem dimensão superior a 30

$\left]\hat{p} - z\sqrt{\dfrac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}},\ \ \hat{p} + z\sqrt{\dfrac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right[$
n – dimensão da amostra $\hat{p}$ – proporção amostral z – valor relacionado com o nível de confiança (*)

(*) Valores de z para os níveis de confiança mais usuais

Nível de confiança	90%	95%	99%
z	1,645	1,960	2,576

A Estrada Nacional 2 (EN2) foi incluída no Plano Rodoviário Nacional de 1945. É a mais extensa estrada portuguesa, totalizando 739,26 quilómetros, e a única na Europa que atravessa um país em toda a sua extensão, desde Chaves até Faro, passando por 35 concelhos.

* **1.** A família Silva vai percorrer a EN2 de automóvel e, antes da viagem, decidiu que ia visitar um dos castelos seguintes: castelo de Abrantes (A), castelo de Lamego (L), castelo de Montemor-o-Novo (M) ou castelo de Viana do Alentejo (V).

Para selecionar o castelo a visitar, decidiu-se que cada elemento do agregado familiar atribuía pontos a cada um dos castelos, num total de dez pontos, não podendo atribuir igual número de pontos a castelos distintos.

A Tabela 1 apresenta a distribuição dos 10 pontos realizada por cada elemento da família Silva, de acordo com as suas preferências.

Tabela 1

	A	**L**	**M**	**V**
Carlos	0	5	2	3
Diana	3	1	4	2
Fausto	5	3	0	2
Matilde	3	1	2	4

A escolha do castelo a visitar resultou da aplicação do método seguinte.

- Efetua-se a soma dos pontos atribuídos a cada castelo pelos elementos do agregado familiar e verifica-se se algum dos castelos obtém a maioria absoluta do total de pontos. Caso isso se verifique, será esse o castelo a visitar.
- Se nenhum dos castelos obtiver mais pontos do que os outros todos juntos, o castelo menos pontuado é eliminado da tabela. Caso exista empate entre os castelos menos pontuados, o castelo a eliminar é determinado por sorteio. Uma nova tabela de pontuações é criada, em seguida, com menos uma coluna do que a anterior e os pontos atribuídos por cada elemento do agregado familiar ao castelo eliminado revertem para o castelo, de entre os restantes, ao qual cada um deles atribuiu maior pontuação.
- Os procedimentos anteriores são aplicados à nova tabela de pontuações obtida no ponto anterior, com os pontos já acumulados.
- O processo repete-se até que um dos castelos obtenha maioria absoluta do total de pontos atribuídos.

Complete o texto seguinte, selecionando a opção correta para cada espaço.

Escreva na folha de respostas cada um dos números, **I**, **II**, **III** e **IV**, seguido da opção, **a)**, **b)** ou **c)**, selecionada. A cada espaço corresponde uma só opção.

Por aplicação do método descrito, o primeiro castelo eliminado foi o ___**I**___ , e o segundo foi o ___**II**___ . De entre os restantes castelos, aquele que será visitado será o ___**III**___ , tendo o outro totalizado ___**IV**___ pontos.

I	II	III	IV
a) L **b)** M **c)** V	**a)** L **b)** M **c)** V	**a)** A **b)** L **c)** V	**a)** 18 **b)** 19 **c)** 20

* **2.** O Sr. Augusto é um fornecedor de brindes alusivos à EN2. De momento, dispõe de 200 porta-chaves para entrega imediata a três estabelecimentos: A, B e C.

Na Tabela 2, está registado o número de porta-chaves encomendados ao Sr. Augusto por cada um dos três estabelecimentos.

Tabela 2

Estabelecimentos	**A**	**B**	**C**
N.º de porta-chaves encomendados	350	150	300

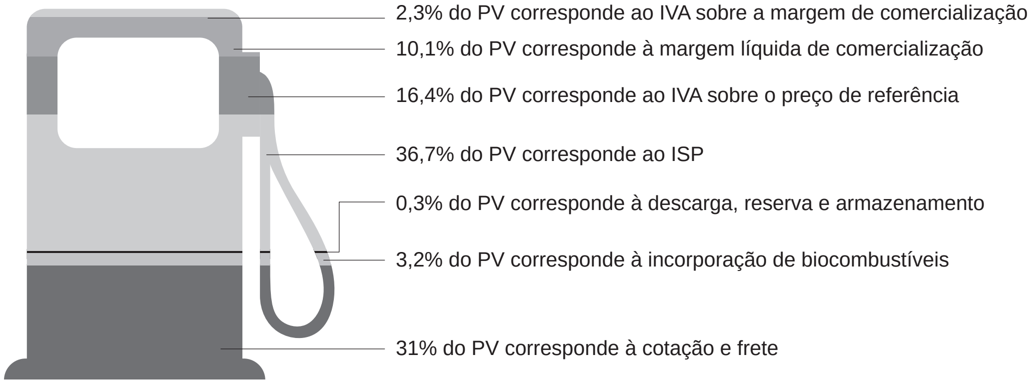
Não conseguindo dar resposta à totalidade das encomendas, o Sr. Augusto optou por distribuir os 200 porta-chaves disponíveis pelos três estabelecimentos, de acordo com o método a seguir descrito.

- Calcula-se o divisor padrão, dividindo o número total de porta-chaves encomendados pelo número de porta-chaves disponíveis para entrega.
- Calcula-se a quota padrão para cada um dos estabelecimentos, dividindo o número de porta-chaves encomendados por cada estabelecimento pelo divisor padrão.
- Atribui-se a cada estabelecimento um número de porta-chaves igual à parte inteira da sua quota padrão.
- Caso ainda fiquem porta-chaves por distribuir, atribuem-se os porta-chaves que restam, um por estabelecimento, sucessivamente, por ordem decrescente das partes decimais das suas quotas padrão, até não restarem porta-chaves para distribuir.
- Se houver dois estabelecimentos cujas quotas padrão apresentem a mesma parte decimal, o último porta-chaves é atribuído ao estabelecimento com o menor número de porta-chaves atribuídos até esse momento.

Determine o número de porta-chaves distribuídos pelo Sr. Augusto a cada estabelecimento, aplicando o método descrito.

3. O preço que o consumidor paga pelos combustíveis resulta da soma de várias parcelas. Algumas delas correspondem a impostos, a saber, o imposto sobre os produtos petrolíferos e energéticos (ISP), e o imposto sobre o valor acrescentado (IVA), que é aplicado tanto à margem de comercialização como ao preço de referência.

Numa determinada semana, foi possível apurar a percentagem do preço de venda de gasolina (PV) correspondente a cada uma das parcelas que o compõem. Na Figura 1, está indicada a percentagem de cada uma das parcelas em relação ao preço de venda de cada litro de gasolina, nessa semana.



Fonte: www.deco.proteste.pt/familia-consumo/orcamento-familiar/noticias/como-calculado-preco-combustiveis (consultado em outubro de 2023). (Adaptado)

Figura 1

Nessa semana, a família Silva viajou pela EN2, percorrendo um total de 3125 km no seu automóvel, que gasta, em média, 4,8 litros de gasolina por cada 100 km.

Admita que toda a gasolina necessária para a viagem foi adquirida durante essa semana e que o preço de venda de cada litro de gasolina foi sempre 1,77 €.

Do valor total gasto em gasolina pela família Silva, nessa semana, uma parte destinou-se a impostos.

Determine o valor, em euros, da parte destinada a impostos, com arredondamento às centésimas.

Caso proceda a arredondamentos nos cálculos intermédios, conserve quatro casas decimais.

4. Durante as pausas na viagem ao longo da EN2, alguns viajantes aproveitam para se divertir com jogos.

O Manuel inventou um jogo, criando peças divididas ao meio. Nas extremidades de cada peça, inscreveu uma das letras, A, B, C, D, E ou F.

A Figura 2 apresenta a totalidade das peças criadas pelo Manuel.

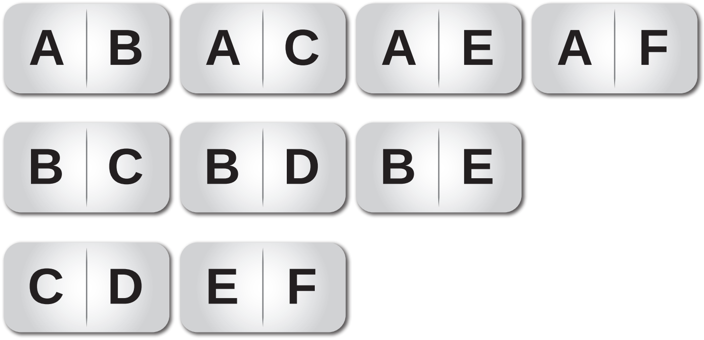


Figura 2

O objetivo deste jogo é criar uma sequência:

– formada por todas as peças, independentemente da primeira peça a ser jogada;

– em que duas peças adjacentes têm de ter letras iguais nas extremidades de contacto, como se exemplifica na Figura 3.

Figura 3

Para averiguar se as peças criadas eram suficientes para formar uma sequência nas condições descritas, o Manuel decidiu construir um grafo.

No grafo construído, cada vértice representa uma das letras utilizadas nas peças criadas pelo Manuel, e cada aresta representa uma peça. Assim, por exemplo, a aresta AB representa a existência da peça em que uma das extremidades tem a letra A e a outra extremidade tem a letra B.

Depois de construir o grafo, o Manuel concluiu que faltava uma peça ao jogo.

Indique as letras que devem estar inscritas nas extremidades da peça em falta.

Na sua resposta, apresente:

– um grafo semelhante ao que o Manuel terá construído;

– uma razão que justifique a impossibilidade de atingir o objetivo do jogo, utilizando apenas as peças da Figura 2.

5. No verão de 2001, um concelho atravessado pela EN2 foi afetado por um incêndio. Visando a criação de uma floresta com maior biodiversidade e mais resistente a incêndios, uma equipa especializada promoveu, ao longo de alguns anos, um projeto de reflorestação daquela zona, plantando diversas espécies de árvores, a partir de 1 de janeiro de 2002.

Admita que o número de árvores, em milhares, existentes naquela região, decorridos t anos após o dia 1 de janeiro de 2002, é bem aproximado pelo modelo

$$A(t) = \frac{66}{1 + 32e^{-0,97t}}, \qquad t \geq 0$$

* **5.1.** A expressão $A(7) - A(5) > 10$ significa que:

(A) Entre 1 de janeiro de 2005 e 1 de janeiro de 2007, o aumento do número de árvores foi superior a 10 000.

(B) Entre 1 de janeiro de 2007 e 1 de janeiro de 2009, o aumento do número de árvores foi superior a 10 000.

(C) Entre 1 de janeiro de 2005 e 1 de janeiro de 2007, o aumento do número de árvores foi superior a 10.

(D) Entre 1 de janeiro de 2007 e 1 de janeiro de 2009, o aumento do número de árvores foi superior a 10.

5.2. No ano em que, pela primeira vez, a 1 de janeiro, o número de árvores foi superior a trinta vezes o número de árvores existentes a 1 de janeiro de 2002, a equipa especializada informou a população de que o número de árvores era aproximadamente igual ao existente antes de ocorrer o incêndio.

Em que ano foi divulgada essa informação?

Para responder a esta questão, recorra às capacidades gráficas da sua calculadora e apresente:

– o(s) gráfico(s) visualizado(s);

– a(s) abcissa(s) do(s) ponto(s) relevante(s) arredondada(s) às centésimas.

* **5.3.** Ao longo de cada ano, o número de árvores, A, foi evoluindo graças não só à quantidade de árvores plantadas ao abrigo do projeto de reflorestação, mas também graças à variação no número de árvores devida a fatores naturais.

Admita que, durante o ano, o aumento do número de árvores devido a fatores naturais corresponde a 0,21% do número de árvores existentes a 1 de janeiro desse ano.

Qual foi, aproximadamente, o número de árvores que se plantou entre 1 de janeiro de 2011 e 1 de janeiro de 2012?

(A) 73 **(B)** 138 **(C)** 65 **(D)** 211

*** 6.** Num estabelecimento comercial, estudou-se o valor gasto, em euros, por um determinado número de clientes na compra de lembranças alusivas à EN2.

Na Figura 4, estão parcialmente registados os dados recolhidos, junto desses clientes, num histograma de frequências absolutas simples e num histograma de frequências relativas acumuladas, em percentagem. Em ambos os gráficos, os clientes foram agrupados nas classes $]0, 10]$, $]10, 20]$, ... , $]50, 60]$, de acordo com os valores gastos, em euros, por cada um deles.

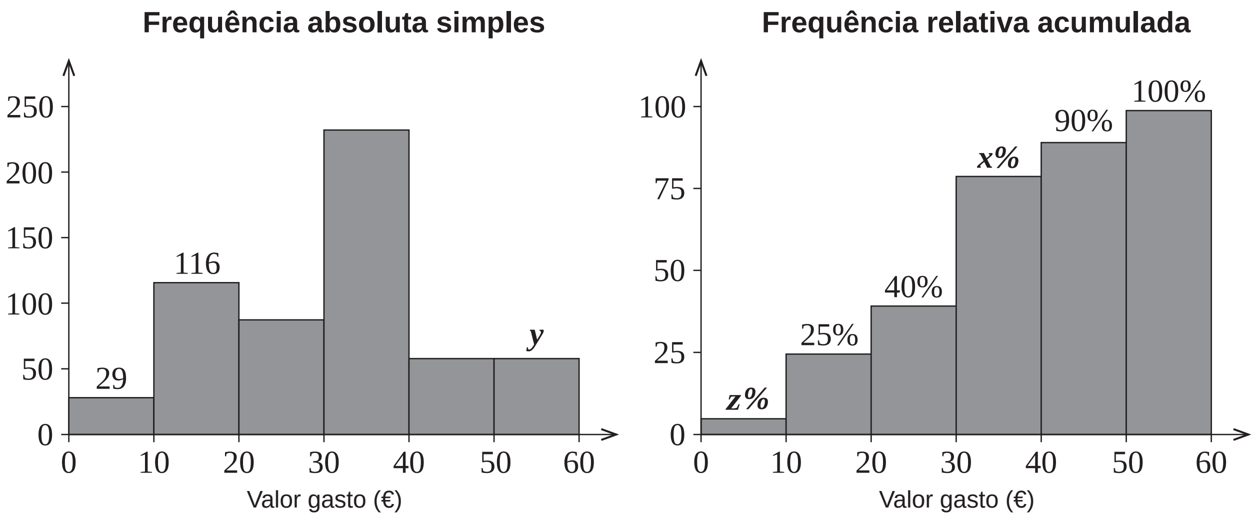


Figura 4

Como se pode observar no histograma de frequências absolutas simples, as classes $]40, 50]$ e $]50, 60]$ têm a mesma frequência.

Complete o texto seguinte, selecionando a opção correta para cada espaço.

Escreva na folha de respostas cada um dos números, **I**, **II**, **III** e **IV**, seguido da opção, **a)**, **b)** ou **c)**, selecionada. A cada espaço corresponde uma só opção.

De acordo com a informação disponível na Figura 4, ____**I**____ dos clientes gastaram na compra de lembranças alusivas à EN2 um valor, em euros, pertencente à classe $]20, 30]$. O valor de z é ____**II**____ , o valor de x é ____**III**____ , e o valor de y é ____**IV**____ .

I	**II**	**III**	**IV**
a) 15%	**a)** 5	**a)** 75	**a)** 46
b) 25%	**b)** 6	**b)** 80	**b)** 52
c) 40%	**c)** 7	**c)** 85	**c)** 58

7. Numa campanha de sensibilização rodoviária realizada na EN2, 400 condutores responderam a um questionário. As respostas obtidas foram organizadas, de acordo com o tipo de veículo conduzido: automóveis ligeiros, motociclos ou autocaravanas.

Na Figura 5, apresentam-se os resultados obtidos relativos às idades, em anos, dos inquiridos, organizados nas classes $[18, 28[$, $[28, 38[$, $[38, 48[$ e $[48, 58[$.

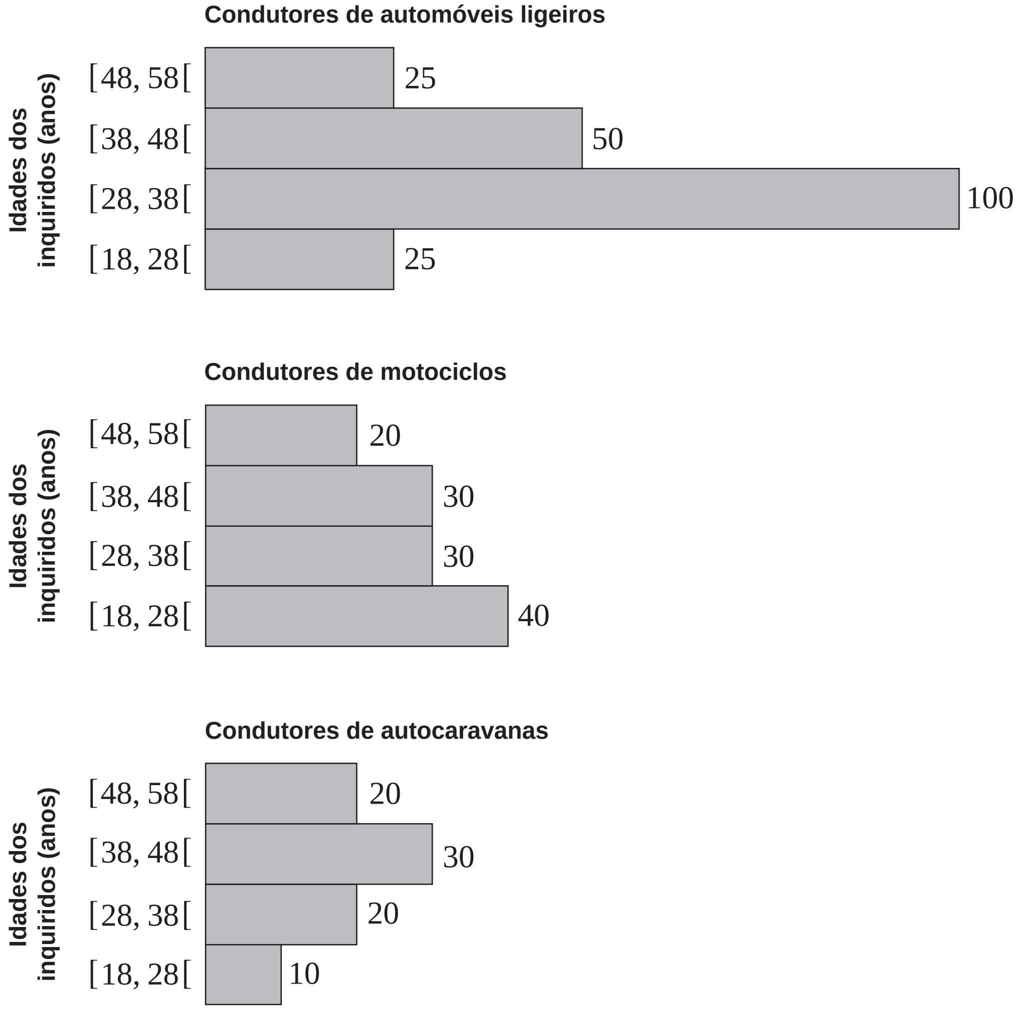


Figura 5

7.1. Apresente uma tabela de frequências absolutas simples e de frequências relativas simples para as idades, em anos, dos 400 condutores inquiridos, sem discriminação do tipo de veículo.

Na sua resposta:

– mantenha as classes utilizadas;

– apresente as frequências relativas simples, em percentagem.

7.2. Na Figura 6, apresentam-se os resultados relativos ao tempo de condução habitual, em horas, em viagens longas, até fazer a primeira pausa, de acordo com as respostas dadas pelos condutores ao questionário.

Tempo de condução ininterrupta (horas)

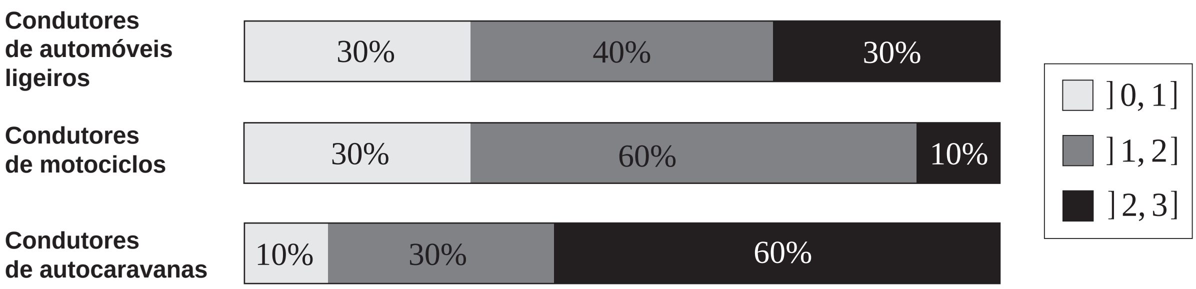


Figura 6

Atendendo aos dados apresentados na Figura 5 e na Figura 6, associe a cada tipologia de condutor apresentada na Coluna **I** as afirmações da Coluna **II** que lhe correspondem.

Cada um dos números, de 1 a 7, deve ser associado apenas a uma letra, e todos os números devem ser utilizados.

Escreva na folha de respostas cada uma das letras da Coluna **I**, seguida do(s) número(s) correspondente(s) da Coluna **II**.

COLUNA I	COLUNA II
(a) Condutores de automóveis ligeiros **(b)** Condutores de motociclos **(c)** Condutores de autocaravanas	**(1)** São os mais numerosos. **(2)** São os menos numerosos de entre os que perfazem mais de 2 horas de condução ininterrupta. **(3)** São aqueles em que mais de metade perfaz um tempo de condução ininterrupta superior a 2 horas. **(4)** São 36 os que perfazem um tempo de condução ininterrupta inferior, ou igual, a 1 hora. **(5)** São aqueles cuja classe modal das suas idades, em anos, é $[18, 28[$. **(6)** São aqueles cujo primeiro quartil do tempo de condução ininterrupta, em horas, se situa em $]1, 2]$. **(7)** São aqueles cuja mediana das suas idades, em anos, se situa em $[38, 48[$.

8. A partir de março de 2020, as matrículas atribuídas em Portugal passaram a ser compostas por sequências formadas por duas letras, dois algarismos e duas letras.

Na Figura 7, apresenta-se uma matrícula possível.

Figura 7

Considere apenas as matrículas que têm na parte numérica o número 78 e cujas letras se podem selecionar ao acaso de entre as 10 letras do conjunto $\{A, B, C, D, E, F, G, H, I, J\}$.

* **8.1.** Complete o texto seguinte, selecionando a opção correta para cada espaço.

Escreva na folha de respostas cada um dos números, **I**, **II**, **III** e **IV**, seguido da opção, **a)**, **b)** ou **c)**, selecionada. A cada espaço corresponde uma só opção.

Escolhe-se ao acaso uma das matrículas que é possível formar nas condições dadas.

Para determinar a probabilidade de obter uma matrícula com apenas uma vogal, que não se pode repetir, o Manuel desenvolveu o raciocínio seguinte.

Uma vez que a parte numérica da matrícula (78) já se encontra definida, o Manuel dedicou a sua atenção à sequência de letras que constitui a matrícula.

O Manuel começou por pensar que a única vogal só poderia ser escolhida de entre as __**I**__ disponíveis. De seguida, percebeu que existem __**II**__ formas de escolher as restantes três letras. Concluiu, portanto, que o número de casos favoráveis para determinar a probabilidade solicitada seria o __**III**__ do produto dos dois valores anteriores.

Quanto ao número de casos possíveis, o Manuel obteve __**IV**__ casos.

I	II	III	IV
a) 2 **b)** 3 **c)** 5	**a)** $7 \times 6 \times 5$ **b)** 7^3 **c)** $7 \times 6 \times 5 \times 3$	**a)** dobro **b)** triplo **c)** quádruplo	**a)** $10 \times 9 \times 8 \times 7$ **b)** 10^4 **c)** $10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 4$

* **8.2.** Algumas das matrículas nas condições iniciais começam e terminam com a letra A, e as restantes letras que as compõem são diferentes entre si e são diferentes da letra A.

Quantas são essas matrículas?

(A) 64 **(B)** 72 **(C)** 81 **(D)** 95

9. Fez-se um inquérito aos alunos de uma escola secundária com o intuito de saber se gostariam de percorrer a EN2 e se tinham carta de condução.

Na Figura 8, apresentam-se os resultados obtidos. Como se pode observar, os dados do gráfico circular situado à direita dizem respeito apenas aos alunos que têm carta de condução.

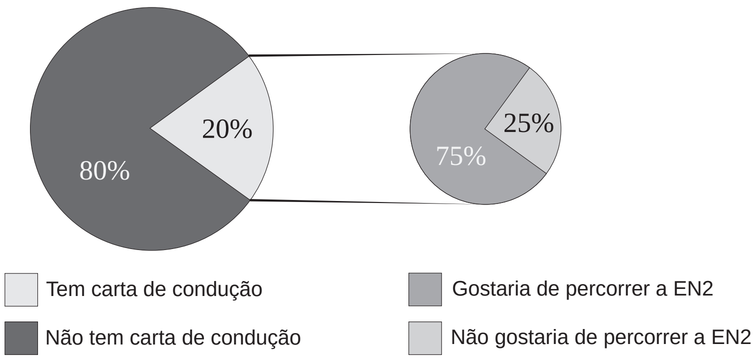


Figura 8

Sabe-se ainda que 50% dos alunos questionados gostariam de percorrer a EN2.

Escolhe-se, de forma aleatória, um dos alunos questionados que gostaria de percorrer a EN2.

Determine a probabilidade de esse aluno não ter carta de condução.

10. A maioria dos viajantes opta por percorrer a EN2 em diversas etapas.

Num clube de motociclismo, pretende-se organizar uma viagem para percorrer toda a extensão da EN2. Numa das reuniões de preparação da viagem, alguém proferiu a afirmação seguinte.

«Em média, nos últimos anos, percorremos toda a EN2 em 6 etapas.»

O Fred, que pertence ao clube, duvidou da afirmação. Falou com 225 motociclistas do clube, escolhidos aleatoriamente, que já tinham realizado a viagem, tendo verificado que, em média, estes a tinham realizado em 4,5 etapas, e que o desvio padrão amostral era 1,2. Por fim, construiu um intervalo de confiança a 99% para o valor médio do número de etapas realizadas.

Conclua, construindo um intervalo de confiança nas mesmas condições do Fred, se este tinha razão para duvidar da afirmação proferida no clube de motociclismo.

Na sua resposta, apresente o intervalo de confiança construído, com os extremos arredondados às centésimas.

Caso proceda a arredondamentos nos cálculos intermédios, conserve três casas decimais.

FIM

COTAÇÕES

As pontuações obtidas nas respostas a estes 9 itens da prova contribuem obrigatoriamente para a classificação final.	**1.**	**2.**	**4.**	**5.1.**	**5.3.**	**6.**	**7.2.**	**8.1.**	**8.2.**	**Subtotal**
Cotação (em pontos)	15	19	19	15	15	15	15	15	15	**143**

Destes 5 itens, contribuem para a classificação final da prova os 3 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.	**3.**	**5.2.**	**7.1.**	**9.**	**10.**	**Subtotal**
Cotação (em pontos)	3 x 19 pontos					**57**
TOTAL						**200**

ESTA PÁGINA NÃO ESTÁ IMPRESSA PROPOSITADAMENTE

Prova 835

1.ª Fase